潮汐力の正確な理解のためには、半田利弘先生による

http://www.ioa.s.u-tokyo.ac.jp/~handa/outreach/TenmonKyoiku_J/Tenkyo0507.pdf

の記事がきわめて分かりやすく有用である。私はこの記事を熟読したが、それでもなかなか腑に落ちなかった点があったので、以下に補足したい。

問題としたいのは、第 4・5・6 節において、「粒子が地点に固定されているかどうか」という設定が異なっている点である。

第 4 節と第 6 節を比較すると、前者では地点と同じ場所にたまたま存在する自由粒子を考え、この粒子と地点との（慣性系における）相対加速度を以て潮汐力の指標としている。いっぽう後者では、粒子を地点に固定する状況を考え、そのために必要な束縛力（後述）を以て潮汐力の指標としている。この違いについてはもちろん断り書きがあるが、読む側がさらに熟考しなければ正確に理解できないかもしれない。また、間の第 5 節ではどちらの扱いになっているのか、計算の詳細を省略していることもあって読み取りにくい。第 5 節では共通重心まわりの回転系において粒子が移動していることがポイントとなるが、そうであれば第 5 節でも粒子は地点に固定されているのだろうか？

この混乱を避けるために、3 つの節で扱われている座標系すべてにおいて、一貫して（第 6 節と同様に）「粒子は地点に固定されている」と考え、座標系の違いによって生じる差異だけを比較することに集中してみよう。

運動方程式から、粒子にかかるすべての力の合計を粒子の質量で割れば、加速度が定まる。粒子を地点に固定するためには、月からの重力と（非慣性系のときの）慣性力のほかに、新たな力を粒子にうまく加え、その加速度が地点の加速度に等しくなるようにしてやらねばならない。この束縛力 B は「潮汐を食い止めるために必要な力」と言えるので、$-B$ を以て「潮汐力」と呼ぶことにする。

第 4 節の慣性系で考えよう。粒子には月からの重力 L がかかるが、これと束縛力 B との合力が、地点と等しい加速度 a を粒子にもたらすと考え、運動方程式を立てると

$$L + B = \mu a$$

となる。これに

$$\begin{pmatrix} L_{\mathrm{far}} \\ L_{\mathrm{center}} \\ L_{\mathrm{near}} \end{pmatrix} = G\frac{\mu M_{\mathrm{m}}}{d^2}\begin{pmatrix} 1/(1+r)^2 \\ 1 \\ 1/(1-r)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{\mathrm{far}} \\ a_{\mathrm{center}} \\ a_{\mathrm{near}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xd\omega^2 \\ xd\omega^2 \\ xd\omega^2 \end{pmatrix}$$

および $xd\omega^2 = GM_{\mathrm{m}}/d^2$ を用いると、各点における単位質量あたりの潮汐力は

$$-\frac{1}{\mu}\begin{pmatrix} B_{\mathrm{far}} \\ B_{\mathrm{center}} \\ B_{\mathrm{near}} \end{pmatrix} = G\frac{M_{\mathrm{m}}}{d^2}\begin{pmatrix} -1+(1+r)^{-2} \\ 0 \\ -1+(1-r)^{-2} \end{pmatrix}$$

と求まる。この計算は第 4 節のものと全く同じだが、元の記事では自由粒子と地点との相対加速度を求めているのに対し、上ではその相対加速度を打ち消すのに必要な束縛力を経由して潮汐力を評価している。この「視点変更」は第 6 節で初めて明示されるが、実は第 4 節の時点で、やろうと思えば可能なのである。

このように第 4 節の視点を第 6 節に揃えたうえで、改めて第 6 節の議論を見返してみよう。この回転系の各々においては、そこで静止している粒子 μ に対して、慣性力として遠心力 F が掛かり、これが慣性力の全部である。したがって運動方程式は

$$L + F + B = 0$$

となる。いま

$$\begin{pmatrix} F_{\text{far}} \\ F_{\text{center}} \\ F_{\text{near}} \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} x d\omega^2 \\ x d\omega^2 \\ x d\omega^2 \end{pmatrix}$$

であるので、上の運動方程式は第 4 節での表式を移項したものに一致する。したがって潮汐力 $-B/\mu$ も同じはずである。

では、第 5 節で省略されている、共通重心まわりの回転系における運動方程式を立てるとどうなるだろうか。この座標系では、粒子には月の重力 L と遠心力 F の他にコリオリ力 C がかかり、かつ、粒子は地点とともに加速運動をしている。すなわち運動方程式は

$$L + F + C + B = \mu a$$

である。元の記事の図 3 および式 (9) を参照しながら各値を求めると

$$\begin{pmatrix} F_{\text{far}} \\ F_{\text{center}} \\ F_{\text{near}} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -(r+x) \\ -x \\ r-x \end{pmatrix} d\omega^2, \begin{pmatrix} C_{\text{far}} \\ C_{\text{center}} \\ C_{\text{near}} \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 2r \\ 0 \\ -2r \end{pmatrix} d\omega^2, \begin{pmatrix} a_{\text{far}} \\ a_{\text{center}} \\ a_{\text{near}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} d\omega^2$$

となり、これを運動方程式に反映させて適当に移項すれば、第 4 節あるいは第 6 節の表式と一致する。