複素数の乗算（かけざん）を複素平面上で視覚的に捉える際には、極座標がきわめて有用であるので、入門書でも $a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ と書き直すところから解説が始まることが多い。これで満足する人には付け加えることは無いが、ここに「天下り」の感を抱く人もいるだろう。そういう人に対して、できるだけ $a+bi$ の形のままで解説し、発見的に「偏角」の有用性に到達できる道筋を考えてみた。

前提として、複素数の「和」「実数倍」「i 倍（90 度回転）」については、複素平面上での操作との対応が理解できている人を想定する。

複素数 z に、複素数 $a+bi$（a,b は実数）を掛けることを考えよう。このとき

$$w=(a+bi)z=az+b(iz)$$

と書くことができる。この結果を作図するには、どうすればよいだろうか？

$z, iz, az, b(iz), w$ に対応する点をそれぞれ $\mathrm{Z}, \mathrm{Z}', \mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{W}$ と書けば（図 1)、

$$\overrightarrow{\mathrm{OW}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=a\overrightarrow{\mathrm{OZ}}+b\overrightarrow{\mathrm{OZ}'}$$

である。ここで $\overrightarrow{\mathrm{OZ}'}$ は、$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$ を原点中心に 90 度回転したものである。すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OW}}$ は、「$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$ を a 倍したもの」と、「$\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$ を 90 度回転して b 倍したもの」との和である。

図 1 において、OW は長方形 OAWB の対角線であり、その長さは $\mathrm{OW}=\sqrt{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2}=\sqrt{a^2+b^2}\mathrm{OZ}$ となる。いま、長方形 OAWB だけを取り出して再び図を描き、各部の寸法を、「$\mathrm{OZ}(=|z|)$ の何倍であるか」に注目して書き込むと、図 2 のようになる。

一見して明らかだが、この図は、複素平面上に新規に $a+bi$ だけを図示したものとほとんど違いがなく、ただ縮尺が異なるのみである。そこで、さきの作図に際して、z とは別に $a+bi$ をこっそり描いておけば何かと便利である。

そもそも z に $a+bi$ を掛けてしまったら、その複素数に対応する点は、一般に原点からの距離・方向がともに変わってしまう。しかし「距離が何倍になるのか」「方向が何度ズレるのか」といった重要情報は全てこの図 2 に集約されている。

すなわち、複素平面上に $\mathrm{P}(a,b)$ をとり、OP の長さと $\angle\mathrm{PO}x$（ただし x は実軸の正の方向）を事前に測っておく。そして、$\mathrm{OP}=k$ ならば $\overrightarrow{\mathrm{OZ}}$ を k 倍に延長し、さらに $\angle\mathrm{PO}x$ と同じ角度だけ反時計回りに回してやればよい。

こうなってくると、「偏角」というものが何やら有用そうな気配を帯びてくるのを曲がりなりにも感じ取ることができる。