二項分布

$$\frac{n!}{k!l!}p^k q^l（ただし\ p+q=1, k+l=n）$$

が、n が巨大であり、k が np に近いとき、正規分布

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$$

に近づくことを納得したい。

前提とする事柄は、Stirling の公式と、「h が小さいとき $1+h \approx e^{h\left(1-\frac{h}{2}\right)}$」なる近似である。後者は $\ln(1+h) = h-(h^2/2)+\cdots$ という展開から頷けるであろう。

Stirling の公式 $t! \approx \sqrt{2\pi t}(t/e)^t$ により

$$\frac{n!}{k!l!}p^k q^l \approx \frac{\sqrt{2\pi n}(n/e)^n}{\sqrt{2\pi k}(k/e)^k\sqrt{2\pi l}(l/e)^l}p^k q^l$$

$\sqrt{}$ の部分をまとめ、さらに $(n/e)^n$ の肩の上の n にだけ $n=k+l$ を用いて、k 乗、l 乗ごとに整理すると、e は約されて消え、下のように整理される。

$$\sqrt{\frac{n}{2\pi kl}}\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{nq}{l}\right)^l$$

先頭の $\sqrt{}$ 部は、$k \approx np,\ l \approx nq$ と考えて置き換えれば（強引！）、$1/\sqrt{2\pi npq}$ と見ることができ、正規分布の式の前半部に一致することが分かる。

残りの部分を見るための準備として、$k:l$ と $p:q$ とのわずかなズレを Δ とすれば、$k=n(p+\Delta), l=n(q-\Delta)$ と書くことができる。この Δ はあとで使うことにして、さらに $k=n(p+\Delta)=np(1+h)$（つまり $h=\Delta/p$）と置き、$(np/k)^k$ の部分を変形してみよう。

$$\left(\frac{np}{k}\right)^k = \left[\frac{np}{np(1+h)}\right]^{np(1+h)} = (1+h)^{-np(1+h)}$$

ここで $1+h \approx e^{h\left(1-\frac{h}{2}\right)}$ を用いれば

$$\approx e^{h\left(1-\frac{h}{2}\right)[-np(1+h)]}$$

指数部を計算すると

$$-nph\left(1-\frac{h}{2}\right)(1+h) = -nph\left(1+\frac{h}{2}-\frac{h^2}{2}\right)$$

h^2 の項を落とし、$h=\Delta/p$ と置いたことを思い出して書き戻せば

$$\approx -n\Delta\left(1+\frac{\Delta}{2p}\right)$$

となり、結局

$$\left(\frac{np}{k}\right)^k \approx e^{-n\Delta\left(1+\frac{\Delta}{2p}\right)}$$

が得られる。まったく同様にして

$$\left(\frac{nq}{l}\right)^l \approx e^{-n\Delta\left(-1+\frac{\Delta}{2q}\right)}$$

が得られるので、これらの積は

$$\left(\frac{np}{k}\right)^k\left(\frac{nq}{l}\right)^l \approx e^{-n\Delta\left(1+\frac{\Delta}{2p}\right)-n\Delta\left(-1+\frac{\Delta}{2q}\right)}$$

となる。再び指数部を取り出し、$p+q=1$ を用いて整理すると

$$
\begin{aligned}
&-n\Delta\left(1+\frac{\Delta}{2p}\right)-n\Delta\left(-1+\frac{\Delta}{2q}\right)=-n\Delta\left(\frac{\Delta}{2p}+\frac{\Delta}{2q}\right)\\
&=-\frac{n\Delta^2}{2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=-\frac{n\Delta^2}{2}\cdot\frac{p+q}{pq}=-\frac{n\Delta^2}{2pq}=-\frac{(n\Delta)^2}{2npq}
\end{aligned}
$$

$n\Delta=k-np$ であることに注意すれば、正規分布の式が得られていることに気付くであろう。