ベクトル三重積の公式

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$$

において、$A = C = r$、$B = \omega$ とおくと

$$r \times (\omega \times r) = (r \cdot r)\omega - (r \cdot \omega)r = |r|^2\omega - (r \cdot \omega)r$$

が得られる。

◆公式の証明

$A \times (B \times C)$ は、B と C の張る平面上に描くことができ、$A \times (B \times C) = kB + lC$（$k,\ l$ はスカラー）と書けるはずだが、上の公式は $k = A \cdot C,\ l = -A \cdot B$ となることを示している。

成分計算で確かめてみる。$A = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$ などとおくと、

$$A \times (B \times C) = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} B_yC_z - B_zC_y \\ B_zC_x - B_xC_z \\ B_xC_y - B_yC_x \end{pmatrix}$$

この外積の第 1 成分は

$$A_y(B_xC_y - B_yC_x) - A_z(B_zC_x - B_xC_z)$$

となるが、証明すべき結論を見越して B_x，C_x について整理すると[*1]

$$= (A_yC_y + A_zC_z)B_x - (A_yB_y + A_zB_z)C_x$$

さらに、$A_xB_xC_x$ を加えてから減じても等しくなるので[*2]

$$= (A_xC_x + A_yC_y + A_zC_z)B_x - (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z)C_x$$

$$= (A \cdot C)B_x - (A \cdot B)C_x$$

と整理される。第 2・第 3 成分についても同様の計算が成り立ち、公式が証明される。

[*1] 「ずるい！」——すみません。

[*2] 「こんなの思い付くかっつーの」——すみませんすみません。