

$v = \omega \times r$ を用いると、

$$L = r \times p = r \times (mv) = mr \times (\omega \times r)$$

すなわち、 ω から L を求めるには、[ア] まず後ろから r を掛けて、[イ] 次に前から r を掛けて、[ウ] 最後に m 倍すればよい。ここで「 r を掛ける」というのは、外積をとる操作のことである。これらの操作を、行列を用いてひとまとめにしたものが「慣性モーメントテンソル」である。すなわち、 $mr \times (\quad \times r)$ という演算を一気に行なってくれる「演算子」のようなものと考えればよい。

いま、 $\omega = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$ 、 $r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ とすると、外積の定義から

$$\omega \times r = \begin{pmatrix} \omega_y z - \omega_z y \\ \omega_z x - \omega_x z \\ \omega_x y - \omega_y x \end{pmatrix}$$

であるが、この式を ω について整理してみる。すると

$$\omega \times r = \begin{pmatrix} 0 \cdot \omega_x + z \cdot \omega_y - y \cdot \omega_z \\ -z \cdot \omega_x + 0 \cdot \omega_y + x \cdot \omega_z \\ y \cdot \omega_x - x \cdot \omega_y + 0 \cdot \omega_z \end{pmatrix}$$

となるが、これは行列で表すことができ

$$\omega \times r = \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

と書ける。この行列を I_1 とすれば、 ω に「後ろから r を掛ける」という操作は、「行列 I_1 を（もちろん左から）掛ける」という操作と等価である。

同様に、前から r を掛ける場合を考えると

$$r \times \omega = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

であり、この行列 I_2 を掛ける操作と等価である（ $r \times \omega = -\omega \times r$ より、 $I_2 = -I_1$ が成り立っている）。

以上から、

$$L = mr \times (\omega \times r) = mI_2 I_1 \omega$$

$I = mI_2 I_1$ において、その成分を計算すると

$$I = m \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -zx \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -zx & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

となり、慣性モーメントテンソルが得られる。