$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = P(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{Q}(t)$$

$P(t)$ の原始関数を任意にひとつ選んで固定し、それを $H(t)$ とする。$\mathbf{X}(t) = \exp[H(t)]\mathbf{F}(t)$ と置き、上の方程式を $\mathbf{F}(t)$ についての微分方程式に書き換えて解く。

$$\frac{d}{dt}\{\exp[H(t)]\mathbf{F}(t)\} = P(t)\exp[H(t)]\mathbf{F}(t) + \mathbf{Q}(t)$$

左辺を計算して

$$\exp[H(t)]\frac{dH}{dt}\mathbf{F}(t) + \exp[H(t)]\frac{d\mathbf{F}}{dt} = P(t)\exp[H(t)]\mathbf{F}(t) + \mathbf{Q}(t)$$

$dH/dt = P(t)$ に注意し、両辺の共通項を消約すれば

$$\exp[H(t)]\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \mathbf{Q}(t)$$

さらに両辺に左から $\exp[-H(t)]$ を乗じ、$\exp[-H(t)]\exp[H(t)] = E$ を用いれば

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \exp[-H(t)]\mathbf{Q}(t)$$

という微分方程式に整理される。右辺の原始関数のひとつを $\mathbf{L}(t)$ とすれば $\mathbf{F}(t) = \mathbf{L}(t) + \mathbf{C}$ （ただし $\mathbf{C}$ は定ベクトル）と書くことができ、もとの方程式の解は

$$\mathbf{X}(t) = \exp[H(t)](\mathbf{L}(t) + \mathbf{C})$$

となる。初期条件として $\mathbf{X}(\alpha)$ が与えられているなら、$\mathbf{X}(\alpha) = \exp[H(\alpha)](\mathbf{L}(\alpha) + \mathbf{C})$ から

$$\mathbf{C} = -\mathbf{L}(\alpha) + \exp[-H(\alpha)]\mathbf{X}(\alpha)$$

と求まる。今回は $P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}$ であるので、その原始関数のひとつとして $H(t) = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -\omega_0^2 t & 0 \end{pmatrix}$ をとることにする。すると $\exp[\pm H(t)] = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & \pm(1/\omega_0)\sin(\omega_0 t) \\ \mp\omega_0\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}$ となる[*1]。これと $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ f\cos(\omega t) \end{pmatrix}$ から、$\exp[-H(t)]\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} (-f/\omega_0)\sin(\omega_0 t)\cos(\omega t) \\ f\cos(\omega_0 t)\cos(\omega t) \end{pmatrix}$ である。積分計算により、この関数の原始関数のひとつとして $\mathbf{L}(t) = \dfrac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t)\cos(\omega t) + (\omega/\omega_0)\sin(\omega_0 t)\sin(\omega t) \\ \omega_0\sin(\omega_0 t)\cos(\omega t) - \omega\cos(\omega_0 t)\sin(\omega t) \end{pmatrix}$ がとれる。

$\mathbf{L}(0) = \begin{pmatrix} f/(\omega_0^2 - \omega^2) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\exp[-H(0)] = E$, $\mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$ から

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(t) &= \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) & (1/\omega_0)\sin(\omega_0 t) \\ -\omega_0\sin(\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}\left[\frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t)\cos(\omega t) + (\omega/\omega_0)\sin(\omega_0 t)\sin(\omega t) - 1 \\ \omega_0\sin(\omega_0 t)\cos(\omega t) - \omega\cos(\omega_0 t)\sin(\omega t) - 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}\right] \\
&= \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2}\begin{pmatrix} \cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t) \\ -\omega\sin(\omega t) + \omega_0\sin(\omega_0 t) \end{pmatrix} + x_0\begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) \\ -\omega_0\sin(\omega_0 t) \end{pmatrix} + v_0\begin{pmatrix} (1/\omega_0)\sin(\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

を得る。

[*1] $\pm H(t)$ の固有値から計算する。また、$\exp[H(t)]\exp[-H(t)] = E$ となることを確認しよう。

◆ $\mathbf{L}(t)$ の計算過程：三角関数の等式（いわゆる「和・積の公式」）を適宜用いて

$$\int\left[-\frac{f}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\cos(\omega t)\right]dt = \int\left(-\frac{f}{\omega_0}\right)\left\{\frac{1}{2}\{\sin[(\omega_0+\omega)t]+\sin[(\omega_0-\omega)t]\right\}dt$$

$$= \frac{f}{2\omega_0}\left\{\frac{\cos[(\omega_0+\omega)t]}{\omega_0+\omega}+\frac{\cos[(\omega_0-\omega)t]}{\omega_0-\omega}\right\}$$

$$= \frac{f}{2\omega_0}\left\{\frac{(\omega_0-\omega)\cos[(\omega_0+\omega)t]+(\omega_0+\omega)\cos[(\omega_0-\omega)t]}{\omega_0^2-\omega^2}\right\}$$

$$= \frac{f}{2\omega_0(\omega_0^2-\omega^2)}\Big(\omega_0\{\cos[(\omega_0+\omega)t]+\cos[(\omega_0-\omega)t]\}-\omega\{\cos[(\omega_0+\omega)t]-\cos[(\omega_0-\omega)]t\}\Big)$$

$$= \frac{f}{2\omega_0(\omega_0^2-\omega^2)}[2\omega_0\cos(\omega_0 t)\cos(\omega t)+2\omega\sin(\omega_0 t)\sin(\omega t)]$$

$$= \frac{f}{\omega_0^2-\omega^2}[\cos(\omega_0 t)\cos(\omega t)+(\omega/\omega_0)\sin(\omega_0 t)\sin(\omega t)]$$

同様にして

$$\int f\cos(\omega_0 t)\cos(\omega t)dt = \frac{f}{\omega_0^2-\omega^2}[\omega_0\sin(\omega_0 t)\cos(\omega t)-\omega\cos(\omega_0 t)\sin(\omega t)]$$

を得る。ただし、 $\omega=\omega_0$ のときは

$$\int\left[-\frac{f}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)\right]dt = \int\left[-\frac{f}{\omega_0}\cdot\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)\right]dt = -\frac{f}{2\omega_0}\left[\frac{-\cos(2\omega_0 t)}{2\omega_0}\right] = \frac{f}{4\omega_0^2}\cos(2\omega_0 t)$$

$$\int f\cos^2(\omega_0 t)dt = \int f\cdot\frac{\cos(2\omega_0 t)-1}{2}dt = \frac{f}{2}\left[\frac{\sin(2\omega_0 t)}{2\omega_0}-t\right] = \frac{f}{4\omega_0}[\sin(2\omega_0 t)-2\omega_0 t]$$

となる。このとき $\mathbf{L}(0)=\begin{pmatrix} f/(4\omega_0^2) \\ 0 \end{pmatrix}$ である。$\mathbf{X}(t)$ の計算に際しては、$\cos(2\omega_0 t)=1-2\sin^2(\omega_0 t)$ および $\sin(2\omega_0 t)=2\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 t)$ を用いることにより、テキストの $\lim_{\omega_0\to\omega} x_f(t)$ と同じ形の結果を得ることができる。