$\exp(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ は指数法則 $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ を満たす。この級数和の形はそもそも指数関数をMaclaurin 展開して得られたものだから、指数法則が成り立つのは当然と感じるかもしれない。ここではその「出自」をひとまず置いて、無心に級数和を眺めるだけで

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+b)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k!}\right)$$

すなわち

$$\frac{(a+b)^0}{0!}+\frac{(a+b)^1}{1!}+\frac{(a+b)^2}{2!}+\frac{(a+b)^3}{3!}+\cdots = \left(\frac{a^0}{0!}+\frac{a^1}{1!}+\frac{a^2}{2!}+\frac{a^3}{3!}+\cdots\right)\left(\frac{b^0}{0!}+\frac{b^1}{1!}+\frac{b^2}{2!}+\frac{b^3}{3!}+\cdots\right)\cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを納得したい。

まず準備として、二項定理

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} a^{n-k} b^k$$

の各辺を $n!$ で割ることにより

$$\frac{(a+b)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{b^k}{k!}$$

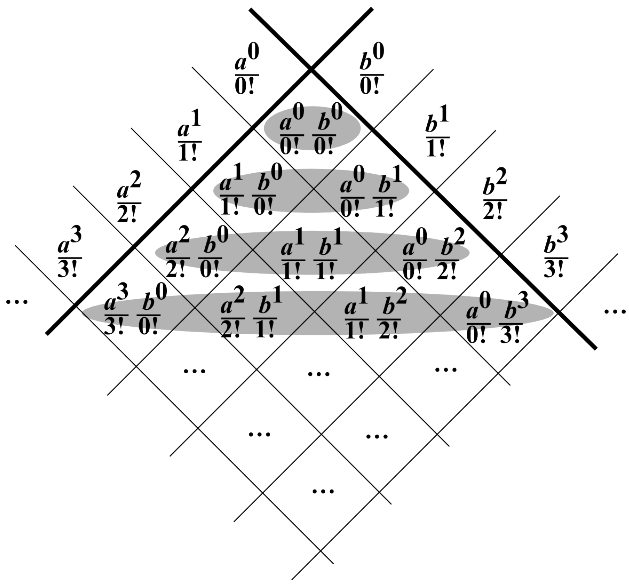
を得る。例えば $n=3$ のとき

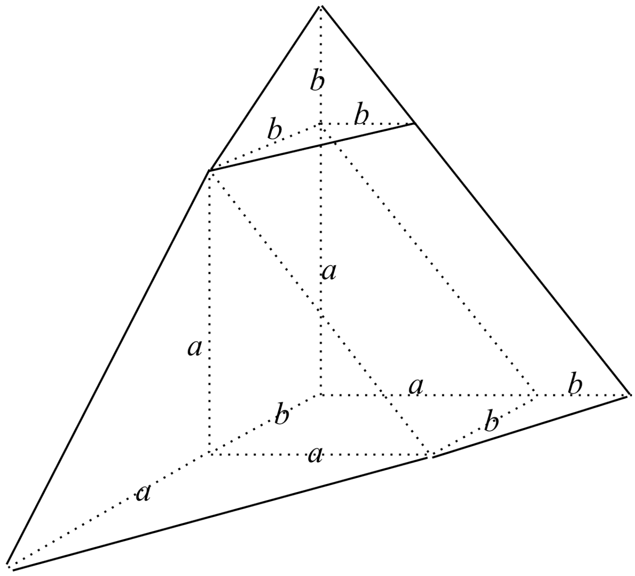
$$\frac{(a+b)^3}{3!} = \frac{a^3}{3!}\cdot\frac{b^0}{0!} + \frac{a^2}{2!}\cdot\frac{b^1}{1!} + \frac{a^1}{1!}\cdot\frac{b^2}{2!} + \frac{a^0}{0!}\cdot\frac{b^3}{3!}\cdots\cdots(\#)$$

と書ける。分子の指数部と分母との対応に注意。

さて、(*) の右辺を展開して左辺に等しくなることを見よう。この展開作業は、下のような直積表の総和を取ることにほかならない。これを、横に貫いた網掛け部ごとに分けて考える。例えば表の最下部を横に貫くと、(#) の右辺に相当するから、$(a+b)^3/3!$ に等しいことが分かる。他の網掛け部についても同様だから、全てを合計すると (*) の左辺に等しくなり、指数法則の成り立つことが頷ける。

なお、(#) は図のような三角錐の分割の様子を見ることで直感的に理解できる。




b
b
b
a
a
b
a
b
a
b
a