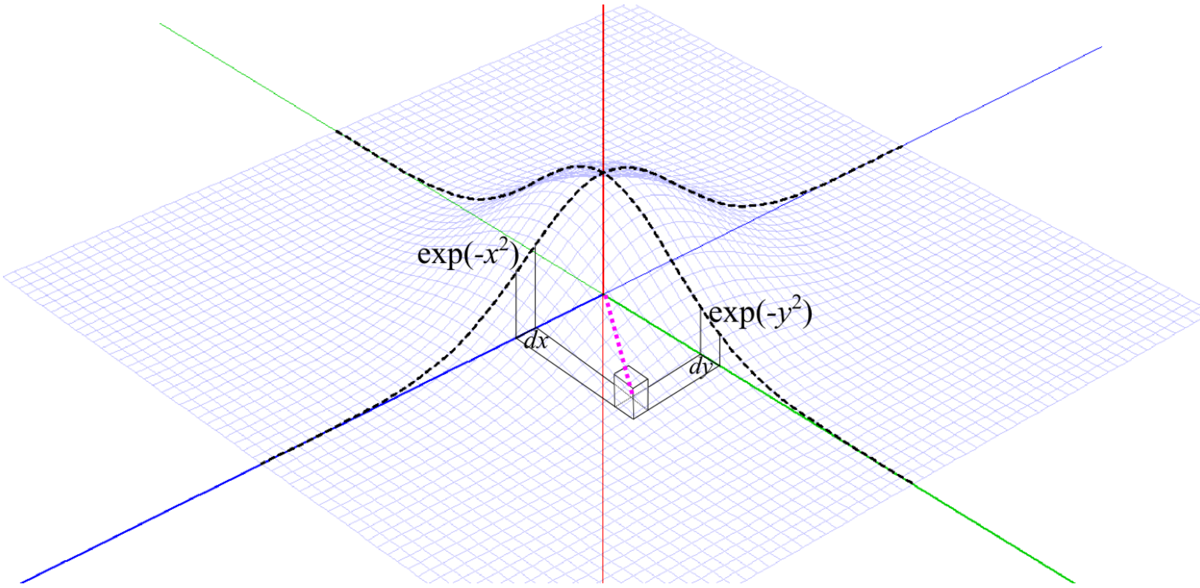

「ガウスの公式」などと呼ばれる積分の公式のひとつに

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)dx = \sqrt{\pi}$$

というものがある。指数関数を積分して π が現れるという結果には、オイラーの公式 $\exp(i\pi) = -1$ に似た不思議さがある。よく知られた導出過程を図示することによって、なぜ π が関わるのか納得したい。

公式の左辺は、言うまでもなく $f(x) = \exp(-x^2)$ と x 軸とに挟まれた（広義の）面積（S とする）であるが、いま、単に平面に曲線 $f(x)$ を描くのではなく、xyz 空間に、2 つの曲線 $z = f(x)$、$z = f(y)$ を描いてみる（図の黒い点線）。そして、これらを包含する曲面 $z = f(x)f(y) = \exp(-x^2 - y^2)$ を描こう。このとき、曲面と xy 平面に挟まれた（広義の）体積 V と S との間に、$V = S^2$ という関係が成り立ち、V を計算すると π となるので、$S = \sqrt{V} = \sqrt{\pi}$ が得られる、というのが導出のあらましである。

[1] まず、$V = S^2$ について。図のように、$(x, y, 0)$ の上に立つ、V の微小部分をなす直方体を考える。この直方体の高さは $f(x)f(y)$ であるので、体積は $f(x)f(y)dxdy$ と書ける。いま

$$f(x)f(y)dxdy = f(x)dx \cdot f(y)dy$$

であり、右辺は xz 平面および yz 平面 上の S の微小部分の面積を掛け合わせたものに相当する。すると

$$\sum_{x,y} f(x)f(y)dxdy = \left(\sum_x f(x)dx\right)\left(\sum_y f(y)dy\right)$$

が成り立ち、$S^2 = V$ であることが頷ける。理解しにくければ $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ などの例を考えてみてほしい。

[2] 次に V を計算しよう。$f(x)f(y) = \exp(-(x^2 + y^2))$ となるので、$r = \sqrt{x^2 + y^2}$（図のピンク色の点線）とすれば $\exp(-r^2)$ と書ける。つまり、きわめて好都合なことに、xy 平面上で原点を中心とする円を考えると、その上空の曲面は一定の高さに浮かんでいるのである。

この対称性から、体積 V を楽に求めることが可能となる。すなわち、半径 r、高さ $\exp(-r^2)$ の円柱側面に

dr の厚みを持たせた「円筒の薄皮」の体積を、$r = 0$ から ∞ まで足し合わせてやればよい。すると

$$\int_0^\infty (2\pi r)\exp(-r^2)dr = \left[-\pi \exp(-r^2)\right]_0^\infty = \pi$$

となり、ここに π が現れる理由を見出すことができる。

[3] 導出過程を振り返ると、面積を求めるためにわざわざ体積を持ち出して議論していることになるが、このようなワザが有用なのであれば、他の積分に対しても適用できると思うかもしれない。すると積分公式は π で溢れ返ってしまうのだろうか？

確かに、他の積分についても上と同じように考えることは可能であるが、それによって計算が楽になるとは限らない。ここではたまたま、曲面を xy 平面に平行に切ったとき、その断面が円になるという対称性があるために、楽に積分ができ、結果として π が現れたのである。その根源をたどれば、そもそも $\exp(ax^2)$ という形が、指数法則とピタゴラスの定理によって $f(x)f(y) = f(r)$ という条件を満たしてくれているおかげである、と言えそうである。