$\ln x = \int_1^x (1/t)dt$ を直感的に理解したい。

$\int_1^x (1/t)dt$ は、曲線 $f(t) = 1/t$ のグラフを描いたとき、$f(t)$ と t 軸、$t = 1$ および $t = x$ に挟まれた領域の面積を表わす。ここでは説明の都合上、t 軸を縦に描いてある。

この面積は、下端を固定して上端 x を動かすことにより、x についての関数 $S(x)$ とみることができる。すなわち、$\ln x = S(x)$、言い換えれば $x = \exp[S(x)]$ となることが納得できればよい。

いま、$t = 1, 2, 4$ という 3 本の直線を引き、図に示した領域の面積 S_1 と S_2 を比較する。

S_1 も S_2 も、右の辺縁が曲線になっているものの、台形状の形をしている。S_1 の上底は 1/2、下底は 1 で、高さは 1 である。これに対し S_2 は、上底 1/4・下底 1/2 と、ともに S_1 の半分の長さを有する一方で、高さは 2、つまり S_1 の 2 倍である。

このことから、「S_1 と S_2 の面積は等しいのではないか」と予想できる。実のところその予想は正しく、境界の t 座標が等比数列になるようにとったとき、隣り合う領域同士について常に成り立つことである。

これは、$x = 1, 2, 4, 8, \ldots$ の各々に対して、$S(x) = 0, S_1, 2S_1, 3S_1, \ldots$ という等差数列になることを意味している。これが納得できれば、x が $S(x)$ の指数関数となる（$S(x)$ は x の対数関数となる）ことも無理なく受け入れられるであろう。