原点からの距離が、偏角の指数関数で表されるような螺旋を「対数螺旋」と呼び、

$$r = a\exp(b\theta)$$

で表される。対数螺旋は「等角螺旋」とも呼ばれ、原点を通る直線に対して常に一定の角をなすことが知られている。この角を β とすると

$$\cot\beta = b$$

の関係がある。これは少し考えれば直感的に明らかなことなのだが、コタンジェントという記号に馴染みが薄いせいもあってか、深く追究せずに通り過ぎている人もいるかもしれない。

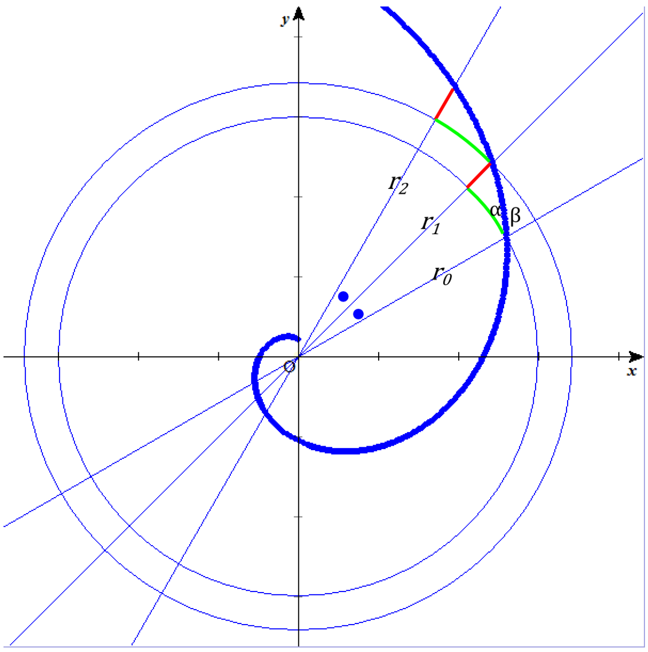
$r = a\exp(b\theta)$ を θ で微分すると

$$\frac{dr}{d\theta} = b \cdot a\exp(b\theta)$$

右辺は br と書けるので、両辺を r で割れば

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = b \cdots\cdots (*)$$

この等式の意味を図で考えよう。



そもそも「r が θ の指数関数になる」ということは、言い換えれば「θ を等間隔にとれば r は等比数列をなす」ということである。図では θ の間隔 $\Delta\theta$ を●で表しているが、このとき

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{r_2}{r_1} = \cdots (\text{一定})$$

各辺から 1 を引いて $\Delta\theta$ で割ると

$$\frac{r_1 - r_0}{r_0\Delta\theta} = \frac{r_2 - r_1}{r_1\Delta\theta} = \cdots (\text{一定}) \cdots\cdots (\#)$$

ここで分母は図の緑の円弧の長さであり、分子は赤い部分（動径の伸長）に相当する。これらの比を一定に保ちながら、中心との距離を伸ばしつつ（あるいは縮めつつ）渦を巻くことが、対数螺旋の特徴であると言える。

(#) において、 $\Delta\theta \to 0$ の極限をとると、分母は $rd\theta$、分子は dr と書き換えることができ、その比が一定値 b をとる、というのが $(*)$ の意味するところである。

さて極限をとったとき、螺旋も円弧も、その接線に限りなく近づくことになるが、両接線のなす角を α とすれば、 (#) あるいは $(*)$ の左辺は $\tan\alpha$ と書ける。これが一定であることから、 α も一定である。すなわち対数螺旋は、自分と同じ半径を持つ円弧に対して一定角度 α ずつ「それながら」渦を巻くことが分かる。

これで「等角螺旋」としての性質は言い尽くされているのであるが、ひとつの対数螺旋に対して α をたくさん描き込むとずいぶん見にくくなる。そこで α の余角（すなわち $90^\circ - \alpha$）を β とすれば、$\tan\alpha = 1/\tan\beta$ の関係があるので、こちらを用いて

$$\frac{1}{\tan\beta} = b$$

と書かれることが多いのである。 $1/\tan\beta$ のことを $\cot\beta$ と書くかどうかは趣味の問題である。