順序関係の性質を整理する

梵天ゆとり（メダカカレッジ）

2013 年 6 月 23 日

1　記事の対象読者と目的

2 項関係のうち、特定の性質を満たすものには「同値関係」や「順序関係」といった名前が与えられ、特に詳しく学ぶことになります。同値関係の反射性・対称性・推移性あたりまでは難なく理解できたとしても、順序関係を学び始めると、さまざまな性質が登場して混乱を覚える人も多いのではないでしょうか。この記事では、一度は同値関係や順序関係を学んだことのある人を対象として、これらに関連する性質を見通し良く整理しなおすことを目的としています。

2　注意

・以下では、A 上の 2 項関係を考える際には $A \neq \emptyset$ であるとします。

・「行列表」という語がたびたび登場しますが、これは 2 項関係を一覧するための 2 次元の表のことです。要素が無限個ある場合には（そして、有限個であっても莫大な個数の場合には）行列表を書き尽くすことはできませんが、行列表は 2 項関係をイメージするのに極めて有用です。行列表の行と列には A の要素が同じ順番で並んでおり、左上から右下にかけて走る対角線上には同じ要素同士の関係を示すマスが並んでいます。関係が成立しているマスには○が、成立していないマスには×が書き込まれています。

3　性質の一覧

この記事に登場する性質をまとめておきます。

		$\sim$	$\subset$	$\subsetneq$	$\leq$	$<$
・推移性	$\forall x \forall y \forall z[{}_xR_y \land {}_yR_z \to {}_xR_z]$	●	●	●	●	●
・反射性	$\forall x[{}_xR_x]$	●	●	−	●	−
・無反射性	$\forall x[\neg {}_xR_x]$	−	−	●	−	●
・反対称性	$\forall x \forall y[({}_xR_y \land {}_yR_x) \to x = y]$	−	●	●	●	●
・弱い三分性	$\forall x \forall y[x = y \lor {}_xR_y \lor {}_yR_x]$	−	−	−	●	●
・対称性	$\forall x \forall y[{}_xR_y \to {}_yR_x]$	●	−	−	−	−

この表は、次節以降を読みながら、あるいは読み終わった後に参照するためのものですから、初めからすべてを理解している必要はありません。しかし、いくつかはすでに知っているでしょうし、論理式を見れば、どういう性質であるかは見当がつくでしょう。表の右には同値関係「∼」と 4 種類の順序関係の例について、

それぞれの性質を備えているかどうかを●と－で示しました。「$\leq$」「$<$」は通常の意味での数の大小関係、「$A \subset B$」は「A は B の部分集合である」、「$A \subsetneq B$」は「A は B の真部分集合である」($A \subset B$ かつ $A \neq B$) という意味です[*1]。それぞれの例について、各性質が確かに成り立つ（または成り立たない）ことを納得してみてください。

この表を見て、「順序関係にはもっと他にも性質が登場したような」とか、「聞いたことのない名前の性質が入っているぞ」と感じるかもしれません。読者の手もとの教科書における各種の順序関係の定義と、これから示す定義とが、結局のところ同値なものであると納得してもらえれば、この記事の目的が達成されたことになります。上の 6 つは、そのことを理解するために最小限必要な、言わば atomic な性質たちです。

4　各性質について理解しよう

では、6 つの性質について注意すべきことを解説しましょう。

4.1　推移性

これはよくご存じでしょう。同値関係・順序関係のいずれにも成り立つ、他の 5 つとは少し雰囲気の異なる性質です。他の性質はいずれも、それが成立しているかどうかを後述のように行列表の上で容易に判定できるのに対し、推移性だけはそう簡単には行きません。

4.2　反射性と無反射性

この 2 つはいずれも、$x = y$ のときの ${}_xR_y$ について制約を加える性質です。すなわち、反射性は「$x = y$ のとき、必ず ${}_xR_y$ が成り立つ」、無反射性は「$x = y$ のとき、決して ${}_xR_y$ は成り立たない」という性質です。行列表で言えば、反射性は「対角線上のマスがすべて○」、無反射性は「対角線上のマスがすべて×」という状態に相当します。当然ですが、反射性も無反射性も、$x \neq y$ のときについては（つまり、行列表の対角線上以外のマスについては）何の制約も加えていないことに注意しましょう。

なお、無反射性は通常「非反射性」と呼ばれますが、ここであえてその呼び方を避けているのは、「反射的でない」($\neg\forall x[{}_xR_x]$ あるいは $\exists x[\neg {}_xR_x]$) という意味だと誤解されないようにするためです。「オール・イエス」($\forall x[{}_xR_x]$) と「オール・ノー」($\forall x[\neg {}_xR_x]$) という両極端の間に、反射的でも無反射的でもない 2 項関係をいくらでも考えることができます。

4.3　反対称性・弱い三分性・対称性

これらをまとめて書いた理由が、つまり 3 つの性質の共通点が分かるでしょうか？実は、これらは「3 兄弟」と呼んでも良いくらいそっくりな性質なのですが、論理式を見ただけではそのことは読み取れないでしょう。ここを理解することがこの記事の大きなヤマですので、順に詳しく見ていきましょう。

4.3.1　反対称性

「$\leq$」を例にとれば、「『$x \leq y$ かつ $y \leq x$』ならば $x = y$」というのは容易に頷けるでしょう。いっぽう「$<$」について、「『$x < y$ かつ $y < x$』ならば $x = y$」は成り立つでしょうか。反対称性の意味するところは、「『${}_xR_y$

[*1] 部分集合には「$\subseteq$」、真部分集合には「$\subset$」という記号を用いれば、「$\leq$」「$<$」と綺麗に対応するのですが、ここでは慣例に従います。

かつ ${}_yR_x$』を満たすような x, y が**もしも存在するならば**、それは $x=y$ の場合に限る」ということです。「$<$」の場合にはそんな x, y は存在しないので、この命題は真になります。したがって、「$\leq$」だけでなく「$<$」も反対称性を備えています。「$\subset$」と「$\subsetneq$」についても全く同様の議論が成り立ちます。後述するように、反対称性は（推移性とともに）すべての順序関係が備えている性質です。

いま、少し視点を変えて、反対称性の論理式の対偶をとってみましょう。すると

$$x \neq y \to \neg({}_xR_y \wedge {}_yR_x)$$

となります。すなわち、「異なる 2 つの要素 x, y について、${}_xR_y$ と ${}_yR_x$ が同時に成り立つことはない」という意味です。これは「$<$」「$\subsetneq$」であろうと「$\leq$」「$\subset$」であろうと備えている性質であることを確認してください。

このように、反対称性は行列表の対角線上以外のマスについて制約を加えているだけであって、対角線上のマスについては実は何も言っていないのです。この点が、後に続く「弱い三分性」および「対称性」との共通点です。

4.3.2 弱い三分性

論理式から分かる通り、これは「$x=y$、${}_xR_y$、${}_yR_x$ のうち少なくとも 1 つが必ず成り立つ」という性質です。「弱い」と付いているのは、「正確に 1 つが成り立つ」（強い三分性）である必要はなく、2 つ以上が同時に成り立っていても構わないためです。「$\subset$」「$\subsetneq$」はこの性質を持たないのに対し、「$\leq$」「$<$」はいずれもこの性質を備えています。特に「$<$」は強い三分性を備えています。それではなぜ強い三分性を表に載せていないのかというと、表にある基本的な性質を組み合わせれば作ることができるためです（後述)。

弱い三分性についても、論理式の書き換えを行ってみましょう。$P \vee Q$ は $(\neg P) \to Q$ と書き換えられることを用いると

$$x \neq y \to ({}_xR_y \vee {}_yR_x)$$

となります。すなわち、「異なる 2 つの要素 x, y について、${}_xR_y$ と ${}_yR_x$ の少なくとも一方が必ず成り立つ」という意味になります。これと、先ほどの反対称性を書き換えたものとを見比べれば、その類似性は歴然としています。反対称性が言わば「両想い禁止」だとすれば、弱い三分性は「双方無関心の禁止」であると言えます。

4.3.3 対称性

最後の対称性は、同値関係が備えるべき性質の一つであり、順序関係とは無縁ですが、ここで触れておきます。もうお気づきかもしれませんが、対称性は「片想い禁止」という制約です。すなわち、「${}_xR_y$ と ${}_yR_x$ は、『両方とも成立』か『両方とも不成立』のいずれかであって、『一方だけが成り立つ』ということはない」という性質です[*2]。

ただ、対称性を表す論理式には「$x \neq y$ ならば」という限定句がなく、先の 2 つと同列に並べることはできないようにも見えます。そこで $x=y$ の場合について考えてみると、${}_xR_y \to {}_yR_x$ は ${}_xR_x \to {}_xR_x$ と書き換えられます。これを、単なる ${}_xR_x$ と混同しないように注意してください[*3]。「${}_xR_x \to {}_xR_x$」は ${}_xR_x$ の真偽に関わらず常に真ですから、対称性は実質的に $x=y$ の場合については何も制約を加えていないのです。対称性の論理式をわざわざ

$$x \neq y \to ({}_xR_y \to {}_yR_x)$$

[*2] ${}_xR_y \to {}_yR_x$ という論理式を見る限り、${}_yR_x$ だけが成立する状況は許されるように見えますが、結局 x, y はすべての要素をわたるので、実際には起こり得ません。

[*3] ここを混同すると、「対称的な関係は必ず反射的である」といった誤った結論に陥ってしまいます。

と書いても、もとの論理式と同値になります。

4.3.4 「3 兄弟」のまとめ

以上により、反射性・無反射性が $x = y$ の場合（行列表の対角線上のマス）についての性質であるのに対し、反対称性・弱い三分性・対称性は $x \neq y$ の場合（対角線以外のマス）についての性質であることが分かりました。${}_xR_y$ と ${}_yR_x$ の成立の是非の組み合わせは「両方とも成立」「両方とも不成立」「一方が成立、他方は不成立」のいずれかであり、「3 兄弟」はこれらのうちのひとつを $x \neq y$ の場合について禁止します。例えば反対称性と弱い三分性を組み合わせれば、前 2 者が禁止されるため、「($x \neq y$ のとき)『一方が成立、他方は不成立』だけを許す」という状況を作ることができます。これは「$\leq$」「$<$」などの全順序（後述）が備えている性質です。

蛇足ですが、3 つの性質を同時に要求してしまうと、のすべての可能性が禁止されてしまいますから、2 個以上の要素を持つ集合の上では、そんな 2 項関係は存在しません。

5 順序とは

各性質の理解を深めたところで、いよいよ「順序関係」の定義を見直しましょう。

【定義】集合 A 上の 2 項関係のうち、反射性または無反射性のいずれか一方に加え、推移性と反対称性とを備えたものを「(A 上の）順序関係」と呼びます。

この定義も、読者の教科書に載っているものと違って見えるかもしれません。通例の定義との対応については後で詳しく解説するとして、先に順序関係の大まかな分類について眺めることにします。

5.1 弱い順序と強い順序、半順序と全順序

順序関係の例として挙げた「$\leq$・$<$・$\subset$・$\subsetneq$」を、2 つずつの組にせよと言われたら、どう分けるでしょうか？おそらく、「$\leq$・$\subset$」と「$<$・$\subsetneq$」に分ける人と、「$\leq$・$<$」と「$\subset$・$\subsetneq$」に分ける人がいるでしょう。それぞれの視点について詳しく見てみましょう。

「$\leq$・$\subset$」のように反射性を備えた順序関係を「弱い順序」と呼び、「$<$・$\subsetneq$」のように無反射性を備えた順序関係を「強い順序」あるいは「狭義の順序」と呼びます。この名前には少し誤解の恐れがあり、「強い順序は同時に弱い順序でもある」というわけではありません。A 上の 2 項関係が反射性と無反射性を同時に備えることはあり得ませんから、すべての順序関係は弱い順序か強い順序のいずれか一方に分類されます。

これとは別に「弱い三分性を合わせ持つかどうか」という視点があります。単に順序と呼ばれるためには弱い三分性は必須ではなく、「$\subset$・$\subsetneq$」はこの性質を備えていませんが、「$\leq$」「$<$」はこれを備えています。このように、弱い三分性を備えた順序を「全順序」と呼び、全順序とは限らない順序一般を指して「半順序」と呼びます。つまり「半順序」は、単に「順序」と言ったときと同じ意味になりますが、場合によっては「全順序でないもの」だけを指すこともあります。「全順序かどうか」を直感的に言えば、「要素を順序に従って並べたとき、枝分かれが生じることなく一本道になるかどうか」に相当します。

5.2 弱い順序と強い順序は、一方から他方を機械的に作れる

弱い順序と強い順序について、下の定理が成り立ちます。

【定理】${}_xW_y$ が弱い順序であるとき、${}_xW_y \wedge x \neq y$ という関係は強い順序になる。

${}_xS_y$ が強い順序であるとき、${}_xS_y \vee x = y$ という関係は弱い順序になる。

${}_xW_y \wedge x \neq y$ という関係を作ることは、${}_xW_y$ の行列表の対角線上のマス（すべて○で埋まっている）を、すべて×に変更することに相当します。同様に、${}_xS_y \wedge x = y$ の行列表は、${}_xS_y$ の行列表の対角線上を「すべて×」から「すべて○」に変更したものです。このように弱い順序と強い順序は、反射性と無反射性を入れ替えることによって、機械的に一方から他方にスイッチすることができるのです。この定理を証明するには、新たに作った関係が各種順序の定義を満たしていることを確認する必要があります。とは言え、反射性／無反射性については（そのように作ったのだから）明らかだし、対角線上以外のマスには手をつけていないので、反対称性や（全順序の場合の）弱い三分性が保たれることも明らかです。しかし、推移性が保たれることは全く自明ではありませんので、きちんと証明する必要があります（証明は省略）。

6　順序関係の各性質を統合してみる

以上のとおり順序関係の性質を理解すれば事足りるはずなのですが、実際には教科書によってさまざまな書き方があり、それらが互いに同値であることを納得しておく必要があります。

6.1　弱い半順序

弱い半順序とは、推移性・反射性・反対称性を備えた 2 項関係のことです（代表例は「$\subset$」）。これについては、流儀の異なる書き方を見掛けることはありません。

6.2　強い半順序

強い半順序とは、推移性・無反射性・反対称性を備えた 2 項関係のことです（代表例は「$\subsetneq$」）。このうち、無反射性と反対称性をまとめて

$$\forall x \forall y[\neg({}_xR_y \wedge {}_yR_x)]$$

あるいは同じことですが

$$\forall x \forall y[{}_xR_y \to \neg {}_yR_x]$$

と書くことができます[*4]。$\neg({}_xR_y \wedge {}_yR_x)$ を $x = y$ の場合と $x \neq y$ の場合とに分けると、前者は $\neg({}_xR_x \wedge {}_xR_x)$ すなわち $\neg {}_xR_x$ となり、無反射性が得られます。後者は反対称性そのものです。

6.3　弱い全順序

弱い全順序とは、推移性・反射性・反対称性・弱い三分性を備えた 2 項関係のことです（代表例は「$\leq$」）。このうち、反射性と弱い三分性をまとめて

$$\forall x \forall y[{}_xR_y \vee {}_yR_x]$$

と書くことができ、「比較可能性」などと呼ばれます。${}_xR_y \vee {}_yR_x$ を、$x = y$ の場合と $x \neq y$ の場合とに分けると、前者は ${}_xR_x \vee {}_xR_x$ すなわち ${}_xR_x$ となり、反射性が得られます。後者は弱い三分性そのものです。

[*4] この性質には適切な名前が付いていません。ときに「非対称性」と呼ばれることがありますが、この記事では用いません。

6.4　強い全順序

強い全順序とは、推移性・無反射性・反対称性・弱い三分性を備えた 2 項関係のことです（代表例は「$<$」)。このうち、無反射性と反対称性がまとめられることは既に見たとおりですが、これにさらに弱い三分性を統合すると、強い三分性と同値になります。すなわち、「$x = y$ と ${}_xR_y$ と ${}_yR_x$ のうち、正確に 1 つだけが成り立つ」という性質です。これを用いると、推移性と強い三分性だけで強い全順序を語り尽くすことができます。

6.5　推移かつ無反射ならば、反対称

最後に、強い順序について再度考えてみましょう。強い順序が満たすべき性質は推移性・無反射性・反対称性でしたが、実は

【定理】推移的かつ無反射的な 2 項関係は、必ず反対称的でもある。

という定理が成り立つのです（証明略)。したがって、強い順序の要件として推移性と無反射性が書かれているならば、そこに反対称性を付け加えるのは冗長です。これはさきほどの強い順序の性質のまとめかたとは別の流儀になりますが、多くの教科書ではこの書き方が採用されています。この定理は順序関係の性質を整理する際にたびたび登場し、かつ、結論を直感的に受け入れることが容易とは言えない点で、記憶しておくと便利な定理です。