π が無理数であることはよく知られているが、その証明は初心者には敷居が高いとみなされがちである。いくつかの証明法のうち、初等的知識のみを用いる Niven の証明（1947 年）が有名であるが、原論文はあまりに簡潔過ぎて理解しづらいかもしれない。

証明のアウトラインは、背理法による。 π は有理数であると仮定し、$\pi = a/b$（a, b は正の整数）とおく。いま、

$$I_n = \int_0^\pi \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \sin x dx \text{ (n は正の整数)}$$

という積分を考える。これは

(1) 積分計算により任意の n に対して整数値となることが示される。

一方、

(2)I_n を評価することにより、n を十分に大きくとれば $0 < I_n < 1$ の範囲に収まることが示される。

これは矛盾であるので、π は有理数ではない。

ここで誰もが疑問に思うことは、「なぜ、このような関数を考えるのか？どこから出てきたのか？」ということであろう。それを問い詰められれば、「うまくいくから」としか答えられないのであるが、証明を理解してゆくにつれ、「なるほど」と感じされられるような絶妙な特徴が備わっていることに気付く。以下では、その特徴ができるだけ読み取れるように解説を試みる。

(1) の積分計算を、具体的に $n = 3$ の場合について行なってみよう。$g_n(x) = x^n(a-bx)^n$ とおけば、

$$I_3 = \int_0^\pi \frac{g_3(x)}{3!} \sin x dx = \frac{1}{3!} \int_0^\pi g_3(x) \sin x dx$$

この後で部分積分を行なうことになるが、その過程を詳細に書くと大局を見失ってしまうので、ここでは結果だけを書くことにする。

$$\begin{aligned} I_3 = \frac{1}{3!}[&g_3(0) - g_3^{(2)}(0) + g_3^{(4)}(0) - g_3^{(6)}(0) \\ &+ g_3(\pi) - g_3^{(2)}(\pi) + g_3^{(4)}(\pi) - g_3^{(6)}(\pi)] \end{aligned}$$

右辺の [ ] 内は複雑に見えるが、「$g_3(x)$ の $2m$ 階導関数を、 $m = 0, 1, 2, 3$ について、符号を反転させつつ足し合わせた関数」に、 $x = 0$ および π を代入したものの和となっている。この特徴を捉えれば、一般の n の場合にどのような結果になるかは容易に想像できるだろう。

さて、右辺に現れる $g_3^{(2m)}(0), g_3^{(2m)}(\pi)$ の値が全て $3!$ で割り切れることが示されれば、 I_3 は整数値となることが導かれる。引き続き具体例で見てゆこう。

$g_3(x) = x^3(a-bx)^3$ を展開すれば $a^3x^3 - 3a^2bx^4 + 3ab^2x^5 - b^3x^6$ となるが、具体的な係数は重要ではなく、再び整数となることに留意してほしい。そこで、これを $g_3(x) = px^3 + qx^4 + rx^5 + sx^6$（ただし、$p, q, r, s$ は整数）とおいて微分してゆくと

$$\begin{aligned}
&g_3^{(0)}(x) = px^3 + qx^4 + rx^5 + sx^6 \\
&g_3^{(1)}(x) = 3px^2 + 4qx^3 + 5rx^4 + 6sx^5 \\
&g_3^{(2)}(x) = (3 \cdot 2)px + (4 \cdot 3)qx^2 + (5 \cdot 4)rx^3 + (6 \cdot 5)sx^4 \\
&g_3^{(3)}(x) = (3 \cdot 2 \cdot 1)p + (4 \cdot 3 \cdot 2)qx + (5 \cdot 4 \cdot 3)rx^2 + (6 \cdot 5 \cdot 4)sx^3 \\
&g_3^{(4)}(x) = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)q + (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)rx + (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3)sx^2 \\
&g_3^{(5)}(x) = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)r + (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2)sx \\
&g_3^{(6)}(x) = (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)s \\
&g_3^{(7)}(x) = 0 \\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

となる。ここでのポイントは、もとの $g_3(x)$ が 3 次以上の項のみで構成されているために、 $g_3^{(2)}(x)$ までは定数項が現れず、 $g_3^{(3)}(x)$ 以降で定数項が現れたころには、それまでの微分操作の結果が積もり積もって 3! の倍数となっていることである。それぞれについて、 $x=0$ のときの値を求めれば

$$\begin{gathered}
g_3^{(0)}(0)=0 \\
g_3^{(1)}(0)=0 \\
g_3^{(2)}(0)=0 \\
g_3^{(3)}(0)=(3!)p \\
g_3^{(4)}(0)=(4!)q \\
g_3^{(5)}(0)=(5!)r \\
g_3^{(6)}(0)=(6!)s \\
g_3^{(7)}(0)=0 \\
\vdots
\end{gathered}$$

すなわち、 $g_3^{(k)}(0)$ はすべて 3! で割り切れることが分かる。ここでは証明しないが、これは実は一般の n について成立する。

$g_n^{(k)}(\pi)$ については計算が複雑となるので、式の特徴を利用する。 $\pi=a/b$ とおいたことに注意して、$g_n(x)=b^n x^n(\pi-x)^n$ と変形すれば、

$$g_n(x)=g_n(\pi-x)$$

が成り立つことが分かる。この両辺を微分してゆくと

$$\begin{gathered}
g_n^{(1)}(x)=-g_n^{(1)}(\pi-x) \\
g_n^{(2)}(x)=+g_n^{(2)}(\pi-x) \\
g_n^{(3)}(x)=-g_n^{(3)}(\pi-x) \\
g_n^{(4)}(x)=+g_n^{(4)}(\pi-x) \\
\vdots
\end{gathered}$$

$x=\pi$ を代入すれば

$$\begin{gathered}
g_n^{(1)}(\pi)=-g_n^{(1)}(0) \\
g_n^{(2)}(\pi)=+g_n^{(2)}(0) \\
g_n^{(3)}(\pi)=-g_n^{(3)}(0) \\
g_n^{(4)}(\pi)=+g_n^{(4)}(0) \\
\vdots
\end{gathered}$$

これは $g(x)$ のグラフが $x=\pi/2$ に関して対称であることから、直感的にも頷ける結果である。このことから、$g_n^{(k)}(\pi)$ は $g_n^{(k)}(0)$ 同様、すべて $n!$ で割り切れる。

以上から、I_3、ひいては（ここでは証明しないが）I_n が整数値となることが示される、というのが (1) のあらましである。

次に、(2) の評価を行なう。 $0<x<\pi=a/b$ において $0<a-bx<a$、したがって両不等式を掛け合わせることができて

$$0<x(a-bx)<\frac{a^2}{b}$$

これを n 乗して $1/n!$ を掛け、さらに $0<\sin x<1$ を掛ければ

$$0<\frac{x^n(a-bx)^n}{n!}\sin x<\frac{1}{n!}\left(\frac{a^2}{b}\right)^n$$

全辺を 0 から π まで積分すれば、不等号は保たれて

$$0 < \int_0^\pi \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}\sin x dx < \int_0^\pi \frac{1}{n!}\left(\frac{a^2}{b}\right)^n dx$$

となり、真ん中の辺は I_n そのものである。いま、最右辺の積分の中身は $n \to \infty$ で 0 に収束する（直感的には、定数の n 乗よりも $n!$ のほうがはるかに急激に増大する）ため、十分大きな n をとれば

$$0 < I_n < 1$$

とすることができる。

(1)(2) は互いに矛盾するため、 π は有理数ではないことが示される。

注：初等的には π は「円周と直径の比」などと定義されるが、上の証明ではそのような定義を用いているわけではない。その代わりに「π は $\sin x$ の正の零点のうち最小のものである」という定義が採用されている。これは証明中では「 $\sin\pi = 0$」、また「 $0 < x < \pi$ において $0 < \sin x < 1$」などの形で用いられている。