**素数定理**：$n$ 以下の素数の個数を $P(n)$ とすると、

$$P(n) \approx n/\ln n$$

が成り立つ。

素数定理を少し書き換えると

$$n/P(n) \approx \ln n$$

すなわち $n$ 以下の整数を考えたとき、平均すれば $\ln n$ の間隔で素数が現れる、と言える。素数の出現の規則性は極めて大きな謎であるが、その出現頻度については、上記のような単純な式で近似できるのである。

なぜここで自然対数が登場するのかを納得することを主たる目標として、素数定理の初等的証明を、さらに初等的に焼き直してみよう。数学的に曖昧なところはすべて $\approx$ という記号（免罪符）でごまかしているので注意。

前提とする事柄は、Stirling の近似 $n! \approx (n/e)^n$ と、「$t \approx 1$ のとき、$t-1 \approx \ln t$」という近似である。後者は、$t = e^x$ と $t = x+1$ とが $(0,1)$ 付近ではほぼ同一視できることから理解されたい。

まず、$n!$ の素因数分解を考える。例えば $100!$ を実際に素因数分解すると

$$100! = 2^{97} \times 3^{48} \times 5^{24} \times 7^{16} \times 11^{9} \times 13^{7} \times 17^{5} \times 19^{5} \times 23^{4} \times 29^{3} \times 31^{3} \times 37^{2} \times 41^{2} \times 43^{2} \times 47^{2}$$
$$\times 53 \times 59 \times 61 \times 67 \times 71 \times 73 \times 79 \times 83 \times 89 \times 97$$

となる。ここで素数 $p$ の指数を見てみると、$100/(p-1)$ 付近の整数値となっていることが読み取れる。これにはもちろん理由があるが、ここでは説明を省略して、大きな $n$ について一般的に成り立つことを受け入れる。すなわち $p$ を $n$ 以下の最大の素数としたとき、

$$n! \approx 2^{\frac{n}{1}} 3^{\frac{n}{2}} 5^{\frac{n}{4}} \times \cdots \times p^{\frac{n}{p-1}}$$

と近似的に書けるのである。

次に、Stirling の近似式を変形して $n \approx e \cdot (n!)^{\frac{1}{n}}$ とし、上式を反映させれば

$$n \approx e \cdot 2^{\frac{1}{1}} 3^{\frac{1}{2}} 5^{\frac{1}{4}} \times \cdots \times p^{\frac{1}{p-1}}$$

となる。

これを用いて、素数の出現間隔を見積もってみよう。$p$ のあとに現れる素数を順に $q, r$ とすると、$n$ は $p$ と $q$ の間にある。いま、議論しやすいように、$n$ は $q$ よりわずかに小さい整数であると仮定しよう。同様に $r$ よりもわずかに小さい整数 $m$ を考えると

$$m \approx e \cdot 2^{\frac{1}{1}} 3^{\frac{1}{2}} 5^{\frac{1}{4}} \times \cdots \times p^{\frac{1}{p-1}} q^{\frac{1}{q-1}}$$
$$= n \cdot q^{\frac{1}{q-1}}$$

と書けるはずである。$m-n$ は $r-q$、すなわち素数の出現間隔を与える。巨大な数の世界では $n$ も $q$ も $q-1$ も大差ないので、すべて $n$ に統一すれば

$$m - n \approx (n \cdot n^{\frac{1}{n}}) - n = n(n^{\frac{1}{n}} - 1)$$

いま $n^{\frac{1}{n}}$ について考えると、これは例えば $1000000^{0.000001}$ のような数であり、わずかに $1$ よりも大きい値を持つ。そこで、冒頭に述べた二つ目の近似を用いて、

$$\approx n \ln(n^{\frac{1}{n}}) = \ln n$$

となり、 $n$ 付近での素数の出現間隔がおよそ $\ln n$ で与えられることが分かる。これは $n$ 以下の全体での平均間隔とは異なるが、 $n$ が大きいほど、前のほうの出現頻度の影響が後ろに凌駕されるため、全体としても $\ln n$ によって出現間隔が見積もられることになるのである。